

# Задача 4.12

Рыгин Антон, 303 группа

# Условие задачи

- Вычислить и представить в одном масштабе спектры периодической последовательности треугольных импульсов для различных соотношений между длительностью импульса и периодом следования импульсов:  $\tau = T/2, T/4, T/16$ .
- Вычислить и построить спектр одиночного треугольного импульса.

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{2a}{\tau} \left( t + \frac{\tau}{2} \right), & -\frac{\tau}{2} < t < 0 \\ -\frac{2a}{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} \right), & 0 < t < \frac{\tau}{2}, \quad \xi(t) = \xi(t + T) \\ 0, & -T/2 < t < -\tau/2, \quad \tau/2 < t < T/2 \end{cases}$$

# Часть 1

- Периодический сигнал представим в виде ряда Фурье (суммы гармоник):

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

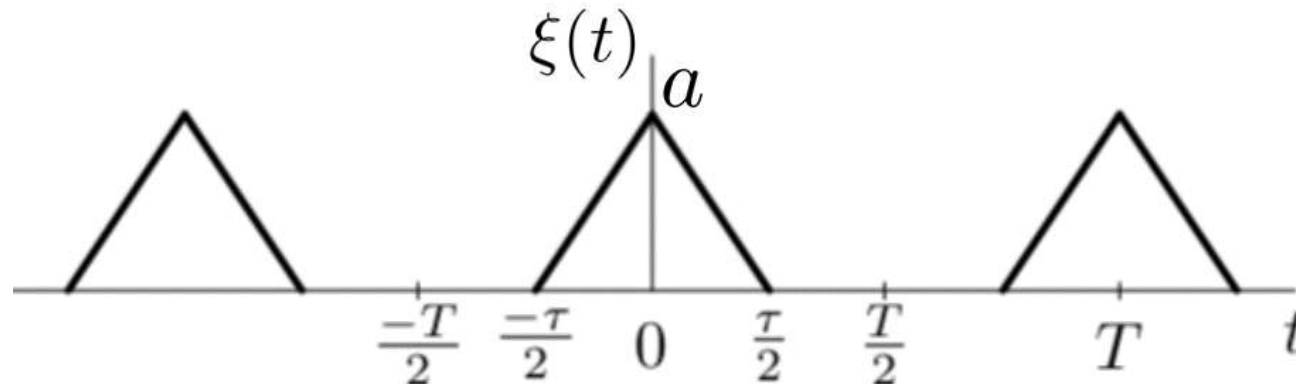
- Амплитуды гармоник вычисляются по следующим формулам:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \xi(t) \cos \omega_n t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \xi(t) \sin \omega_n t dt$$

- Дискретный спектр сигнала:

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \delta(\omega - \omega_n)$$

$$a_n = d_n + d_{-n}, \quad b_n = i(d_n - d_{-n})$$



- Задача поиска спектра периодического сигнала – это задача поиска коэффициентов ряда Фурье. Для удобства будем искать их в комплексной форме:

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{a}{T} \int_{-\tau/2}^0 \left( \frac{2t}{\tau} + 1 \right) e^{-i\omega_n t} dt + \\ &+ \frac{a}{T} \int_0^{\tau/2} \left( -\frac{2t}{\tau} + 1 \right) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{2a}{T\tau} \left( \int_{-\tau/2}^0 t e^{-i\omega_n t} dt - \int_0^{\tau/2} t e^{-i\omega_n t} dt \right) + \\ &+ \frac{a}{T} \left( \int_{-\tau/2}^0 e^{-i\omega_n t} dt - \int_0^{\tau/2} e^{-i\omega_n t} dt \right) \end{aligned}$$

- Первые два слагаемых находим путём интегрирования по частям:

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left( x - \frac{1}{a} \right)$$

- Путём несложных преобразований окончательно получаем:

$$d_n = \frac{a\tau}{\pi^2 n^2 T} \left(1 - \cos \frac{\pi k \tau}{T}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) dt = \frac{a}{T} \int_{-\tau/2}^0 \left(\frac{2t}{\tau} + 1\right) dt + \\ &+ \frac{a}{T} \int_0^{\tau/2} \left(-\frac{2t}{\tau} + 1\right) dt = \frac{a\tau}{2T} \end{aligned}$$

$$d_n = \begin{cases} \frac{2a\tau}{n^2 \pi^2 T}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ \frac{a\tau}{2T}, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases}$$

- Тригонометрический базис:

$$a_n = d_n + d_{-n} = 2d_n; \quad b_n = i(d_n - d_{-n}) = 0$$

- $\tau = T/2$ :

$$d_n = \begin{cases} \frac{a}{n^2\pi^2}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ a/4, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases}$$

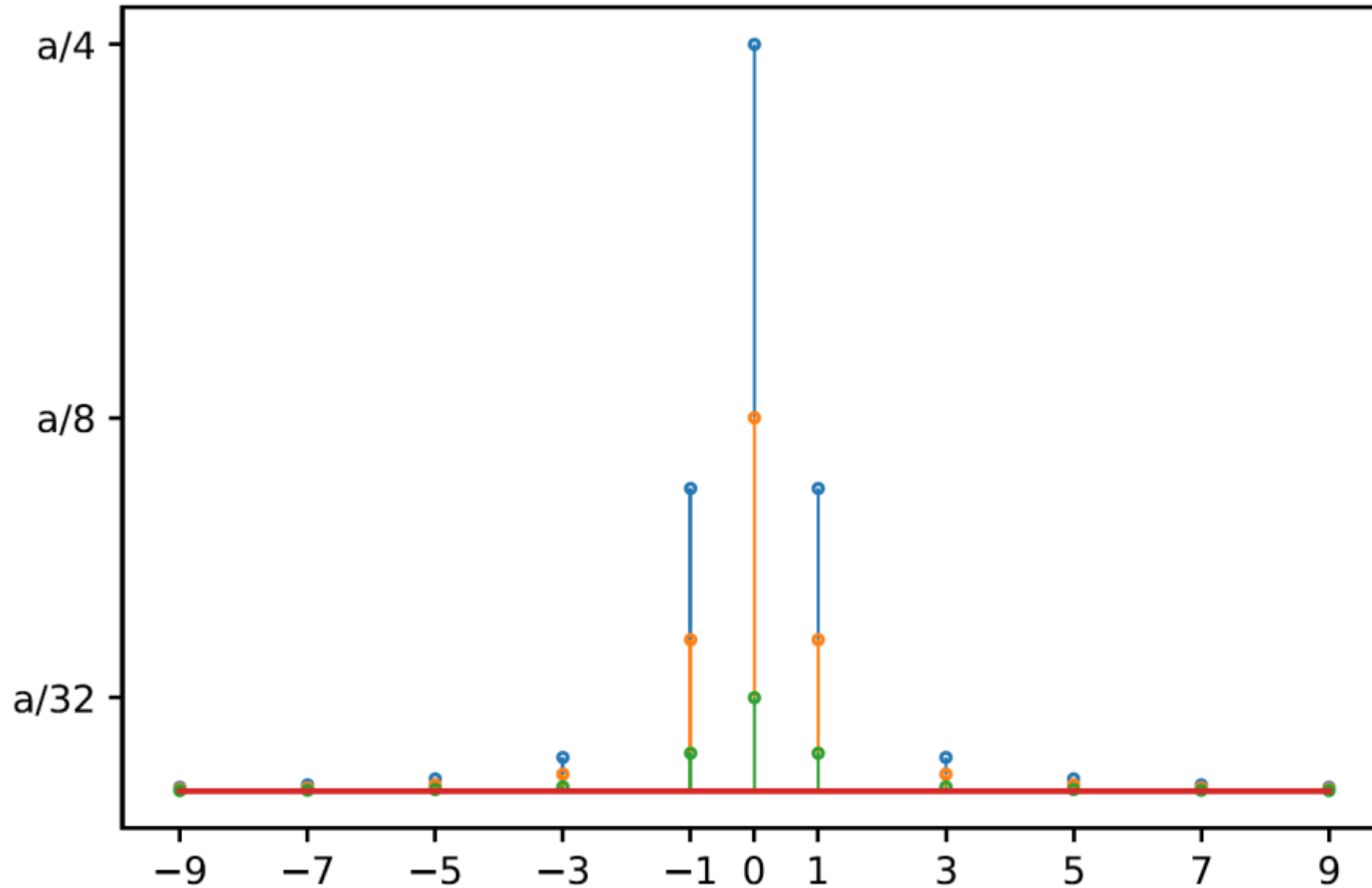
- $\tau = T/4$ :

$$d_n = \begin{cases} \frac{a}{2n^2\pi^2}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ a/8, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases}$$

- $\tau = T/16$ :

$$d_n = \begin{cases} \frac{a}{8n^2\pi^2}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ a/32, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases}$$

# График спектров периодической функции



## Часть 2

- Одиночный сигнал представим в виде интеграла Фурье:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Спектр определяется выражением:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt$$

- 1-й вариант решения: напрямую вычислить спектр, используя интегрирование по частям
- 2-й вариант решения: воспользоваться свойством свёртки сигналов.

- Пусть сигнал представляет собой свёртку сигналов:

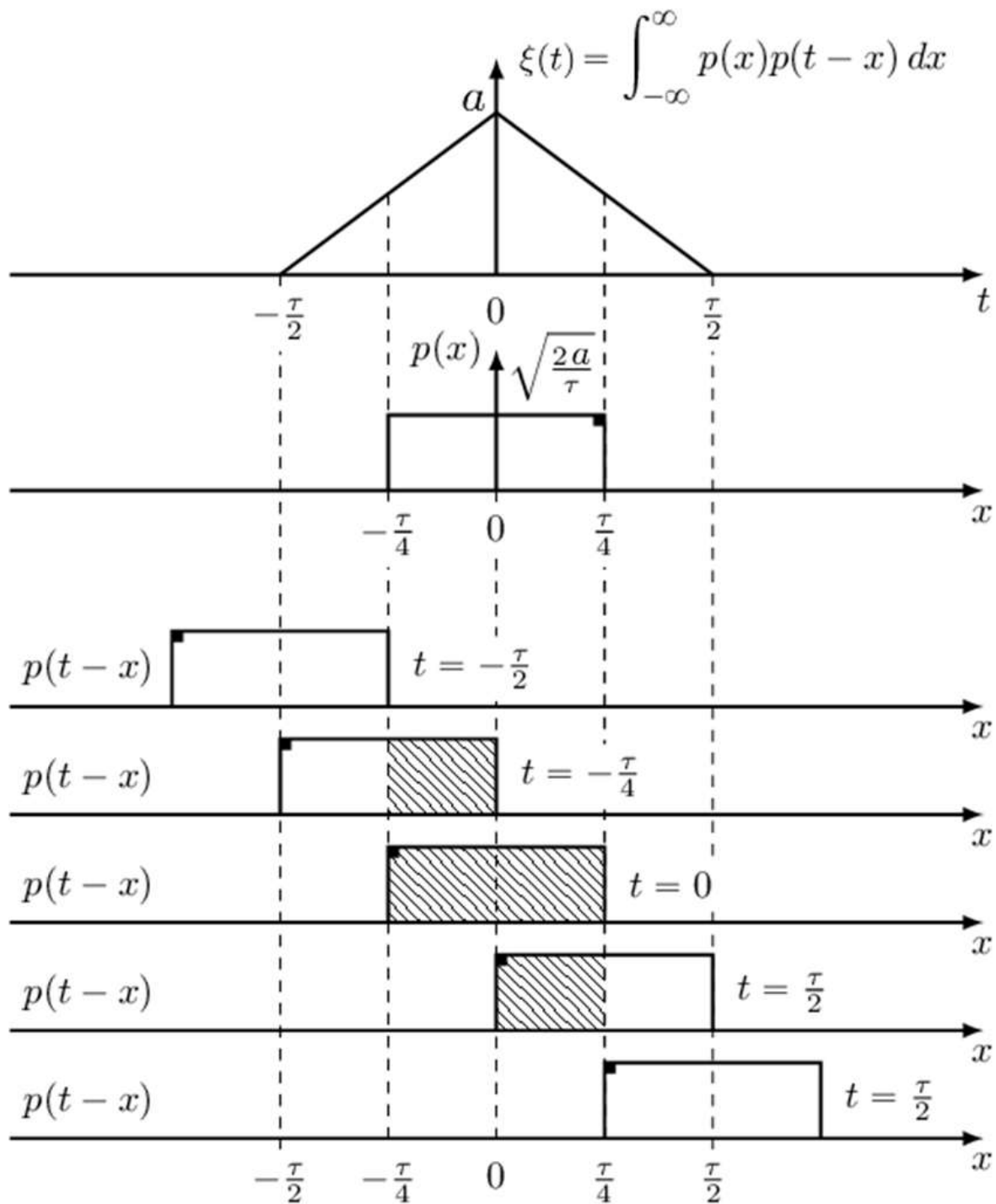
$$s(t) = a(t) * b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)b(t-x)dx$$

- Тогда спектр сигнала может быть представлен в виде:

$$S(\omega) = \mathcal{F}[a(t) * b(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(x)b(t-x)dx e^{-i\omega t} dt$$

- Поменяем порядок интегрирования, и используем свойство (4) временного сдвига:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} a(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} b(t-x)e^{-i\omega t} dt}_{B(\omega)e^{-i\omega x}} dx = \\ &= B(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} a(x)e^{-i\omega x} dx = B(\omega)A(\omega) \end{aligned}$$



- Треугольный одиночный сигнал может быть получен путём свёртки двух прямоугольных сигналов длительности  $\tau/2$  и амплитуды  $\sqrt{2a/\tau}$ .

$$S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)] = \left( \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{2a}{\tau}} \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega\tau}{4} \right) \right)^2 = \frac{a\tau}{2} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega\tau}{4} \right)$$

# График спектра одиночного сигнала

